



TITLE:

# 臨界を大きく超えた液膜流に生じる構造(波動現象におけるパターンの生成と特異性)

AUTHOR(S):

大信田, 丈志

---

CITATION:

大信田, 丈志. 臨界を大きく超えた液膜流に生じる構造(波動現象におけるパターンの生成と特異性). 数理解析研究所講究録 1998, 1030: 222-237

ISSUE DATE:

1998-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/61822>

RIGHT:

## 臨界を大きく超えた液膜流に生じる構造

鳥取大学 工学部 応用数理工学科 大信田 丈志 (OOSHIDA Takeshi)

### 1 序論

液膜流上に生じる様々な構造を観察した Kapitza の実験 [1] からもう半世紀が過ぎようとしているが、その理論的理解はいまだじゅうぶんに進んでいるとはいいがたい。

一様厚さの液膜の線形安定性問題は Benjamin [2] および Yih [3] によって解かれ、レイノルズ数  $R$  が臨界値  $R_c = (5/4) \cot \alpha$  を超えたときに最初に不安定になる波数は漸近的にゼロであることが分かった。(なお  $\alpha$  は斜面の角度で、 $\alpha = \pi/2$  が垂直壁に相当する。) 1966 年に Benney [5] は長波パラメータ  $\mu$  によって基礎方程式系を展開し、液膜厚さ  $h$  だけで閉じた形の非線形発展方程式を得た。Gjevik [6, 7] および Nakaya [8] はこの手法を発展させ、ウェーバー数  $W$  (表面張力と重力の比) の大小に応じて表面張力または高次の粘性効果が安定化要因となることを示した。これにより、不安定化と安定化の両方の要因を含む非線形の支配方程式が液膜厚さ  $h$  に関して得られたことになり、液膜流の力学はこの方程式に縮約できたかのように思われるかもしれない。

ところが問題は、彼らの導いた長波方程式が、臨界のごく近くでしか有効でないことである。Pumir *et al.* は Gjevik [6] の導いた方程式 (導出については Appendix B を参照)

$$\partial_t h + \partial_x \left[ \frac{2}{3} h^3 + \left( \frac{8}{15} R h^6 - \frac{2}{3} (\cot \alpha) h^3 \right) \partial_x h + \frac{2}{3} W h^3 \partial_x^3 h \right] = 0 \quad (1)$$

を境界条件  $h(-\infty) = h_1 = 1$ ,  $h(+\infty) = h_2 \simeq 1$  のもとで数値的に解いた。ここでレイノルズ数  $R$  は 10 程度であり、ウェーバー数  $W$  は数千のオーダーである。方程式 (1) の定常進行解として孤立波が求められ、その波形は Kapitza の観察したものとよく似ていた。また、 $R$  がある限界値  $R_*$  以下のときには、初期値問題の解としても孤立波が形成される場合があることがわかった。ところが、同じ論文 [10] の Fig. 5 に示された分岐図によると、方程式 (1) の定常進行孤立波解は  $R_c < R < R_*$  の範囲でしか実現しない。初期値問題を  $R > R_*$  の場合に解くと、孤立波は自己収束を起こし有限時間で振幅が無限大になる。このことは液膜流で実際に起こる特異な現象に関係があるのか、それとも単に長波展開の破綻であって実際の現象とは関係がないのかという疑問が生じる。Salamon *et al.* [11] は Navier-Stokes 方程式の自由表面問題を有限要素法によって解き、Navier-Stokes の場合の分岐図を求めた。これは  $R$  が臨界値  $R_c$  に近いところでのみ長波展開の結果と一致し、上記の  $R_*$  のような限界値は現れない。つまり長波方程式は  $R$  が臨界値から離れたところでは正しい結果を与えないということになる。

方程式 (1) は長波パラメータ  $\mu$  のみによる展開であり、液膜厚さ  $h$  はそのまま  $O(1)$  の量として扱っているため、相当に非線形性の強い方程式となっている。この展開は、確かに波長さえ十分長ければ任意の振幅に対して有効であるようにも思われる。しかし、大振幅の長波成分が存在すると、非線形相互作用により短波成分が励起され、長波展開の前提条件が崩れてしまう。孤立波が自己収束する数値計算例 [10] は、短波成分の局所的な振幅を急激に増大させるような非線形相互作用があることを示唆している。

このような破綻から長波展開を救う方法として、振幅展開により余計な非線形相互作用を切り捨てることが考えられる。液膜厚さを  $h = 1 + \phi$  のように書き直し、最低次の非線形性を残すことによって、Kuramoto-Sivashinsky 方程式が得られる。しかし、孤立波の定常振幅は  $R - R_c$  とともに増大するから、振幅展開は臨界点から離れたところではもちろん意味をもたない。それだけでなく、Kuramoto-Sivashinsky 方程式では、波数  $k$  の線形波の成長率に対するゼロ波数モードの影響が切り捨てられている。これは局所レイノルズ

数の効果を無視することに相当しており、波数低下のような非定常問題を正しく扱うことができない。局所レイノルズ数の効果を取り込む最も簡単な方法は

$$\partial_t \phi + \partial_x(\phi^2) + \partial_x^2(\phi + \epsilon \phi^2) + \partial_x^4 \phi = 0 \quad (2)$$

のように  $\partial_x^2(\phi^2)$  に比例する項を Kuramoto-Sivashinsky 方程式に付け加える [12] ことなのだが、方程式 (2) の初期値問題を数値的に解いてみると、多くの場合、方程式 (1) と同様に有限時間で発散する。こういうわけで、単純な振幅展開を採用するわけにはいかない。

本研究では、長波展開を破綻から救う もうひとつの方法として、Padé 近似に類似した正則化手法を導入する。振幅  $h$  に関する非線形性を切り捨てるのではなく、長波成分の非線形性をそのまま残し、それに見合うだけの正確さで短波成分を記述すれば良いという発想である。正則化手法は第2章で導入される。第3章では数値計算による検証を行なう。臨界を大きく超えた領域において、前章で得られたモデル方程式の計算結果と、実験結果および2次元 Navier-Stokes 方程式の結果とを比較し、モデル方程式の妥当性を確認する。第4章では、孤立波の裾構造に着目し、正則化手法で得られた方程式と本来の Navier-Stokes の動力学との関連を論じる。

## 2 モデル方程式の導出

### 2.1 方針

液膜流の運動は Navier-Stokes 方程式の自由表面問題によって記述されるが、その直接的な取り扱いはきわめて困難である。そこで、液膜の厚さ  $h$  が表面波の波長に比べて小さいということを利用し、深さ方向の自由度を消去して、 $h$  のみで閉じた1次元モデルを導く。

ただし、伝統的な長波展開の手法は長波パラメータ  $\mu$  に関する収束性が良くないので、正則化演算子を導入して収束性を改善する。この手法は微分演算子についての Padé 近似であると考えられる。

### 2.2 基礎方程式と境界条件

斜面を下る方向に  $x$  軸を取り、斜面に垂直に  $z$  軸を取る。すべての運動は  $(x, z)$ -面内で起きるものとする。斜面すなわち流体の底面を  $z = 0$  とし、流体の表面を  $z = h(x, t)$  であらわす。水平面に対する斜面の傾斜角を  $\alpha$  とする。

流体は  $0 < z < h$  の領域を占め、その運動は非圧縮性流体の運動方程式に従う：

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}[\rho \mathbf{u} \mathbf{u} - \boldsymbol{\tau}] = \rho \mathbf{g} \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (4)$$

ここで  $\rho = \text{const.}$ ,  $\mathbf{u} = {}^t[u, w]$ ,  $\mathbf{g} = {}^t[g_x, -g_z] = g^t[\sin \alpha, -\cos \alpha]$  である。通常の粘性流体を考えるので、応力テンソル  $\boldsymbol{\tau}$  は

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zz} \end{bmatrix} = -p \mathbf{1} + 2\rho\nu \operatorname{sym grad} \mathbf{u} \quad (5)$$

によって与えられる。

底面 ( $z = 0$ ) では粘着境界条件

$$\mathbf{u}|_{z=0} = 0 \quad (6)$$

を課す。表面 ( $z = h$ ) では、力学的境界条件と運動学的条件が要請される。力学的境界条件は応力に関する条件で、表面の法線ベクトル  $\mathbf{n}$  を用いて次のように表される:

$$\vec{\tau} \cdot \mathbf{n}|_{z=h} = \tau_* \mathbf{n} \quad (7)$$

ここで

$$\mathbf{n} = {}^t[-\sin \theta, \cos \theta], \quad \theta = \tan^{-1} \partial_x h, \quad \tau_* = -p_{\text{atm}} + \frac{T \partial_x^2 h}{[1 + (\partial_x h)^2]^{3/2}}$$

であり、 $p_{\text{atm}}$  は大気圧、 $T$  は表面張力係数を表す。運動学的条件は表面の運動に関する条件で、一般に

$$D_t(h - z)|_{z=h} = \partial_t h + u|_{z=h} \partial_x h - w|_{z=h} = 0 \quad (8)$$

で与えられるが、これは体積流量  $Q = \int_0^h u dz$  を用いて

$$\partial_t h + \partial_x Q = 0 \quad (9)$$

と書き直すことができる。これは流量  $Q$  の保存を示している。

### 2.3 無次元化

攪乱のない、一様な厚さの流れ ( $h = h_0 = \text{const.}$ ) に対する解は容易に求められ、表面での流速および底面での粘性応力は

$$u|_{z=h} = U = \frac{g_x h_0^2}{2\nu} \quad (10)$$

$$\tau_{xz}|_{z=0} = \rho g_x h_0 \quad (11)$$

となることが分かる。なお  $g_x = g \sin \alpha$  である。

必ずしも一様でない液膜においても、特徴的な厚さ  $h_0$  を考えることができるとしよう。このとき、 $h, x, z$  を  $h_0$  で、 $u, w$  を  $U$  で、 $t$  を  $h_0/U$  で無次元化する。また  $p - p_{\text{atm}}$  をあらためて  $p$  と置き、 $p$  および  $\tau$  を  $\rho g_x h_0$  で無次元化する。無次元化の結果を付録 A に示す。無次元パラメータとしては斜面の傾斜角  $\alpha$  のほかにレイノルズ数  $R$  およびウェーバー数  $W$  が現れる。それらは

$$R = \frac{U h_0}{\nu} = \frac{(g \sin \alpha) h_0^3}{2\nu^2}, \quad W = \frac{T}{(\rho g \sin \alpha) h_0^2}$$

のように定義され、それぞれ慣性力および表面張力の指標である。なお  $R$  も  $W$  も  $h_0$  に依存するので、 $h_0$  の選択にあいまいさがある場合はそれに応じてこれらのパラメータにもあいまいさが生じることに注意する必要がある。

### 2.4 正則化演算子

長波パラメータ  $\mu$  を  $\partial_x = \mu \partial_{x_1}$  により導入し、基礎方程式系を展開する。これにより  $Q$  を  $\mu$  のべき級数として

$$Q = Q_0[h] + \mu Q_1[h, \partial_{x_1} h] + \mu^2 Q_2[h, \partial_{x_1} h, \partial_{x_1}^2 h] + \cdots \quad (12)$$

のように求めることができる。各項の具体的な形は付録 B で与えられている。

伝統的な方法 [5, 6, 7, 8] では、級数 (12) で  $Q_1$  または  $Q_2$  までの項を残し、これと流量保存の式

$$\partial_t h + \partial_x Q = 0, \quad Q = \int_0^h u \, dz \quad (13)$$

を組み合わせることによって方程式系を閉じさせる。特に  $Q_1$  まで取り入れた場合には方程式 (1) が得られる。しかし、Salamon *et al.* [11] の数値計算によると、 $Q_2$  を含めた場合も  $Q_1$  までの場合とほとんど変わらず、どちらも同じようにおかしな結果を生じる。これは、級数 (9) の収束性が良くないことを示唆している。

さて、べき級数の収束性が良くない場合、Padé 近似が有効な手法であることが知られている。その本質は、付録 C の記法で言えば、

$$f = g\psi \quad (14)$$

のように置くことによって  $\psi$  の特異性を近似的に解消することである。長波展開が本質的に微分演算子による展開であることを考え、多項式  $g$  に相当するものとして演算子

$$\hat{L} = 1 + A^{(1)}\partial_x + A^{(2)}\partial_x^2 = 1 + \mu A^{(1)}\partial_{x_1} + \mu^2 A^{(2)}\partial_{x_1}^2 \quad (15)$$

を導入する。係数  $A^{(j)}$  は  $h$  に依存してもよい。式 (14) に対応して

$$S = \hat{L}Q = S_0 + \mu S_1 + \mu^2 S_2 + O(\mu^3) \quad (16)$$

を定義する。容易に分かるように

$$S_0 = Q_0 \quad (17)$$

$$S_1 = Q_1 + A^{(1)}\partial_{x_1} Q_0 \quad (18)$$

$$S_2 = Q_2 + A^{(1)}\partial_{x_1} Q_1 + A^{(2)}\partial_{x_1}^2 Q_0 \quad (19)$$

である。

演算子  $\hat{L}$  の係数をうまく決めることにより  $S_2 \simeq 0$  とすることができる。これは関数  $\psi$  のべき級数から Padé 近似を求める手続きとほとんど同じである。演算子  $\hat{L}$  の本質は  $g$  と同じく特異性の消去であることから、 $\hat{L}$  を「正則化演算子 (regularizer, regularization operator)」と呼ぶことにする。なお  $\hat{L}$  を定数係数の演算子でおきかえれば、Ooshida *et al.* [13] の Padé 近似多重尺度法と本質的に同じ手法になる。

## 2.5 正則化モデル方程式の導出

有限の大きさの  $\mu$  を仮定し、液膜厚さ  $h$  を

$$h = \bar{h} + \phi \quad (20)$$

のように  $\mu$  よりずっと低い波数の成分  $\bar{h}$  と それ以外の変動成分  $\phi$  に分ける。変動成分  $\phi$  は 有限の波数  $k \sim \mu$  をもつが、その振幅は小さいはずなので、振幅展開パラメータ  $\epsilon$  を用いて

$$\bar{h} \simeq h \sim 1 \quad (21)$$

$$|\partial_{x_1} \bar{h}| \ll |\partial_{x_1} \phi| \sim |\phi| \sim \epsilon \ll 1 \quad (22)$$

と書く。

振幅展開 (20) を長波展開の結果 (53)(55)(56) に代入し、振幅に関する見つもり (21)(22) を考慮すると

$$Q_2 = \left[ \frac{32}{63} R^2 h^{10} - \frac{40}{63} (R \cot \alpha) h^7 + 2h^4 \right] \partial_{x_1}^2 \phi + \frac{40}{63} \tilde{W} R h^7 \partial_{x_1}^4 \phi + O(\epsilon^2) \quad (23)$$

$$\partial_{x_1} Q_1 = \left[ \frac{8}{15} R h^6 - \frac{2}{3} h^3 \cot \alpha \right] \partial_{x_1}^2 \phi + \frac{2}{3} \tilde{W} h^3 \partial_{x_1}^4 \phi + O(\epsilon^2) \quad (24)$$

$$\partial_{x_1}^2 Q_0 \simeq 2h^2 \partial_{x_1}^2 \phi \quad (25)$$

となるから、これを式 (19) に代入して

$$S_2 = \left[ \frac{32}{63} R^2 h^{10} - \frac{40}{63} (R \cot \alpha) h^7 + 2h^4 + A^{(1)} \left( \frac{8}{15} R h^6 - \frac{2}{3} h^3 \cot \alpha \right) + 2h^2 A^{(2)} \right] \partial_{x_1}^2 \phi \\ + \tilde{W} \left[ \frac{40}{63} R h^7 + \frac{2}{3} h^3 A^{(1)} \right] \partial_{x_1}^4 \phi + O(\epsilon^2) \quad (26)$$

を得る。これをゼロにするには

$$A^{(1)} = -\frac{20}{21} R h^4, \quad A^{(2)} = -h^2 \quad (27)$$

とすればよい。

このとき正則化演算子 (15) が

$$\hat{L} = 1 - \frac{20}{21} R h^4 \partial_x - h^2 \partial_x^2 \quad (28)$$

のように定まる。また (18) は

$$S_1 = Q_1 - \frac{20}{21} R h^4 \partial_{x_1} Q_0 = \frac{2}{3} \left[ -\frac{72}{35} R h^6 \partial_{x_1} h - (\cot \alpha) h^3 \partial_{x_1} h + \tilde{W} h^3 \partial_{x_1}^3 h \right] \quad (29)$$

となるから、式 (16) の右边がすべて決定され、結局 (12) は

$$\hat{L} Q = \frac{2}{3} \left[ h^3 - \frac{72}{35} R h^6 \partial_x h - (\cot \alpha) h^3 \partial_x h + W h^3 \partial_x^3 h \right] \quad (30)$$

で置き換えられる。(見かけ上  $\mu$  を含まない形に書き直した。) こうして  $Q$  と  $h$  の関係式が正則化された形で得られる。

関係式 (30) と流量保存の式 (13) から  $Q$  を消去することにより、 $h$  のみで式を閉じさせることができる。最終的に

$$\partial_t h - \frac{4}{21} R \partial_x \partial_t (h^5) - \partial_x (h^2 \partial_x \partial_t h) + \frac{2}{3} \partial_x \left[ h^3 - \partial_x \left( \frac{\cot \alpha}{4} h^4 + \frac{72}{245} R h^7 \right) + W h^3 \partial_x^3 h \right] = 0 \quad (31)$$

という方程式になる。一見複雑に見えるが、 $h$  だけで閉じている 1 次元モデルである。

## 2.6 純分散方程式への分解

微分階数の偶奇性に着目し、方程式 (31) を

$$\partial_t h - \partial_x (h^2 \partial_x \partial_t h) + \frac{2}{3} \partial_x (h^3) = \partial_x \Lambda \quad (32)$$

$$\frac{2}{3} \left[ \frac{2}{7} R \partial_t (h^5) + \partial_x \left( \frac{\cot \alpha}{4} h^4 + \frac{72}{245} R h^7 \right) + W h^3 \partial_x^3 h \right] = \Lambda \quad (33)$$

のように書きなおす。これにより、方程式 (31) の非保存的なふるまいを、ふたつの純分散性方程式が  $\Lambda$  によって結びつけられた結果として理解することができる。これは Whitham の波動階層理論 [13, 14] の拡張となっている。

ここではくわしく論じないが、方程式 (32) および (33) はそれぞれ粘性ソリトンおよび表面張力波という明確な物理的意味をもっている。小振幅極限で、これらはそれぞれ RLW 方程式 [15] および KdV 方程式 [16] に帰着する。

### 3 数値計算による検証

#### 3.1 数値計算の概要

第 2 節で得られた方程式 (31) の有効性を検証するために、数値的に解を求め、Salamon *et al.* による Navier-Stokes 方程式の計算結果 [11] および Liu *et al.* の実験結果 [17, 18] と比較する。数値計算では、定常進行解を求める問題と時間発展問題の両方を扱う。

#### 3.2 定常進行解の計算

##### 3.2.1 計算方法

方程式 (31) で  $\partial_x = \partial_\zeta$ ,  $\partial_t = -c\partial_\zeta$  と置いて得られる非線形固有値問題を解くことにより、定常進行解の速度  $c$  および波形  $u$  が求められる。今回の計算では、無限領域中の孤立波解にのみ着目する。境界条件は  $h(-\infty) = h(+\infty) = 1$  とし、数値解法には狙撃法 [10] を用いる。

比較のため、Gjevik [6] の長波方程式 (1) および Nakaya [8] の長波方程式 (文献を見よ) に対して同様な計算を行ない、定常進行孤立波解を求める。

##### 3.2.2 定常進行孤立波解の分岐図

傾斜角  $\alpha = \pi/2$ , ウェーバー数  $W = 90$  を固定し、レイノルズ数  $R$  を 0 から増加させたときの定常進行孤立波の分岐図を図 1 に示す。縦軸は孤立波の速度  $c$  である。臨界 ( $R = R_c = 0$ ) の近くではどの方程式もほとんど同じ結果を与えるが、およそ  $R = 1.5$  から先の結果は大きく食い違っている。Gjevik の長波方程式では  $R = 2.2$  付近でサドル・ノード分岐が起き (他の分枝とぶつかって消滅)、Nakaya の長波方程式も  $R = 1.6$  付近で同様の分岐を示すのに対し、方程式 (31) はそのような分岐を全く示さない。

Salamon *et al.* [11] によると、2 次元 Navier-Stokes 方程式の解はこのようなサドル・ノード分岐を示さない。つまり、この分岐は偽の現象であって、長波方程式の破綻を示しているのだが、方程式 (31) はこの破綻から免れていることが分かる。

Salamon らは  $\cot \alpha = 0$ ,  $W = 76.4$  の例を示しているが、彼らは有限領域で周期境界条件を課して計算しているため、 $h$  のベースラインが必ずしも 1 に等しくないなどの違いがあり、ここでの計算と直接に比較するのは難しい。しかし近似的に有限領域効果による補正を行なうと、彼らの結果にかなり近いものが得られる。

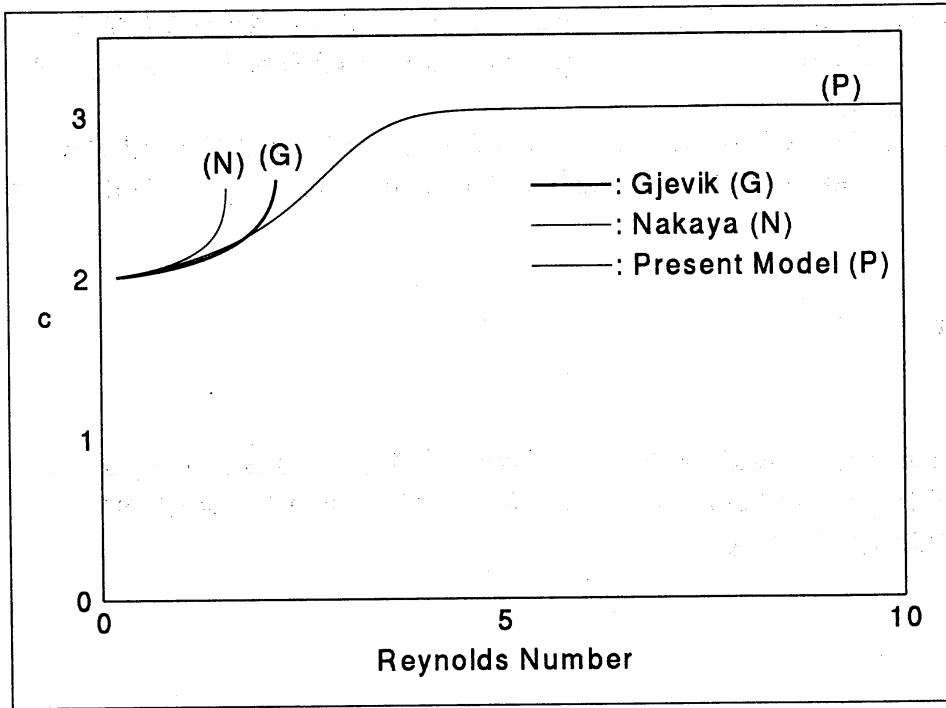


図 1: 定常進行孤立波解の分岐図。傾斜角  $\alpha = \pi/2$ , ウェーバー数  $W = 90$  を固定し、レイノルズ数  $R$  を変化させたときの進行速度  $c$  の変化を、各モデル方程式について示している。Gjevik および Nakaya のモデルでは、分枝がサドル・ノード分岐によって消滅している。

### 3.3 時間発展計算

#### 3.3.1 計算方法

方程式 (31) の初期値境界値問題を差分法で解く。多少の工夫が必要だが、基本的には風上差分による陰解法である [19]。実験との比較がしやすいように、すべての量は通常の次元をもつものとして扱っている。長さの単位は mm、時間の単位は秒である。

境界条件は上流に 2 つ、下流に 2 つ設定する。上流の境界では

$$h(x=0) = H(t), \quad \left[ \partial_x + 2h^2 \partial_x \right] h(x=0) = 0 \quad (34)$$

とする (2 番目の条件は透過条件)。特に断らない限り  $H(t) = h_0 [1 + \epsilon \sin(2\pi ft)]$  のような単色の正弦波攪乱を用いる。下流の境界では透過境界条件およびその微分を課し、さらに境界近くに人工粘性を入れている。

時間積分の刻み幅  $\Delta t$  の大きさは、ステップ二重化法により監視する。これにより時間積分の次数が 1 次から 2 次に上げられるというメリットもある。

#### 3.3.2 孤立波の出現

垂直壁 ( $\alpha = \pi/2$ ) を流れる、初期厚さ  $h_0 = 0.195\text{mm}$  の液膜に生じる孤立波を図 2 (左) に示す。これは Salamon *et al.* の論文 [11] の Fig. 9 (彼らの計算結果および Kapitza [1] の実験結果) と比較することを意図している。物性値はエタノールのもを用いた。無次元パラメータは  $R = 91$ ,  $W = 76.4$  と計算される。

初期条件による攪乱は有限時間で流れ去ってしまうので、最終的に上流境界での攪乱が系を支配するようになる。ここでは攪乱の振幅および周波数を  $\epsilon = 0.01$ ,  $f = 9\text{Hz}$  としている。この攪乱が下流に行くにつれて成長し、上流から 200mm のあたりに達するまでにほぼ定常な孤立波の列を生じる。



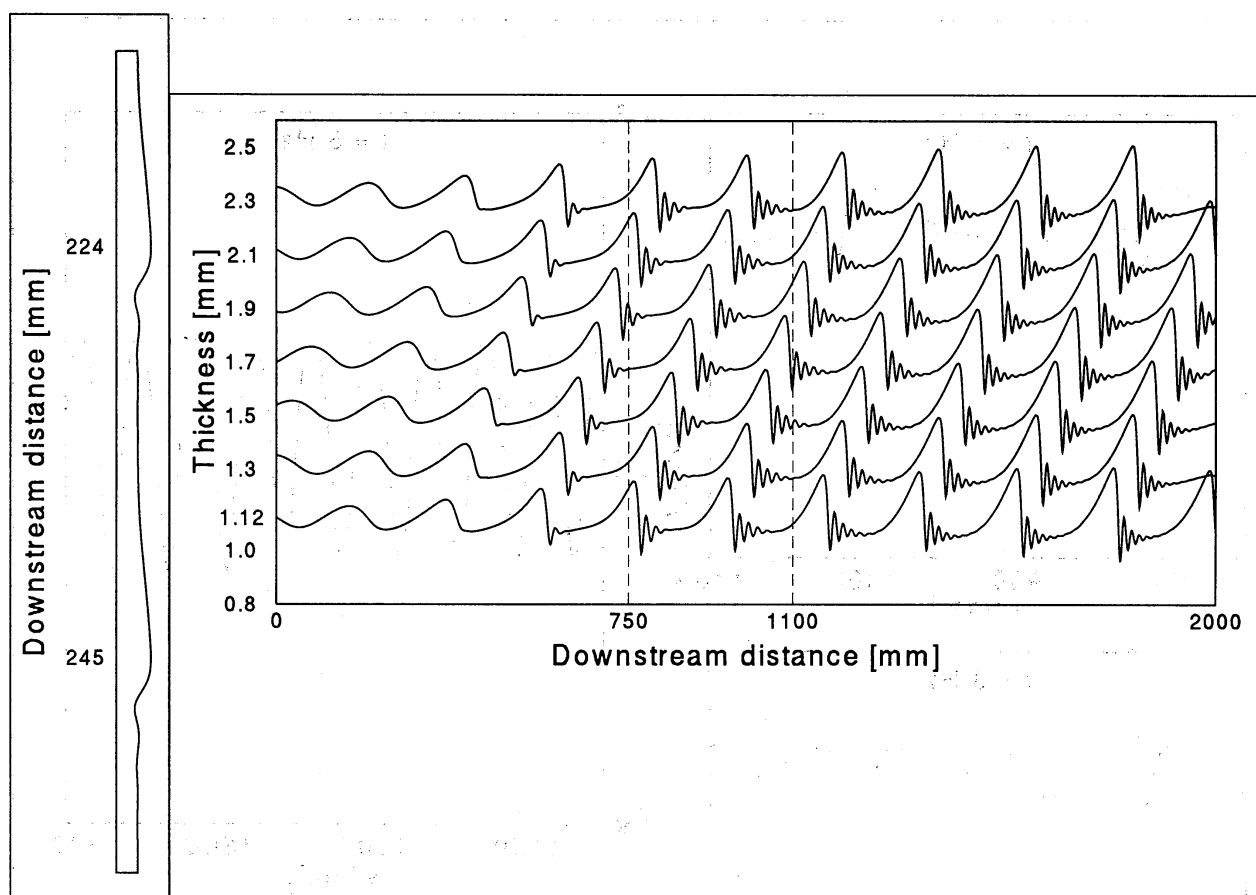


図 2: 上流境界で正弦波攪乱を加えて時間発展させる計算で得られた、定常進行する孤立波の列。  
 [左] Kapitza の実験との比較。傾斜角  $\alpha = \pi/2$ , レイノルズ数  $R = 91$ , ウェーバー数  $W = 76.4$  とし、  
 上流での液膜厚さを  $h_0 = 0.195\text{mm}$  としている。数字は上流からの距離を示す。 [右] Liu *et al.* の実  
 験との比較。傾斜角  $\alpha = 0.08$ , レイノルズ数  $R = 23$ , ウェーバー数  $W = 62$ 。時間間隔 0.2 秒ごとの波  
 形を、液膜厚さ 0.2mm ぶんだけずらして示している。上流での液膜の厚さは  $h_0 = 1.12\text{mm}$  である。

図 2 (左) の波形は、上流の裾の長さがやや過大であるように見えるが、全体として 上流側の単調裾・下流側の振動裾という特徴をよくとらえている。なお、伝統的な長波方程式は  $R = 2$  のあたりで既に破綻しており、この例 ( $R = 9.1$ ) では比較の対象にもならない。

### 3.3.3 正弦波攪乱に対する応答

Liu *et al.* [17] の実験との比較を意図し、水平に近い斜面を流れるグリセリン水溶液の例について計算を行なった。上流での液膜厚さ  $h_0 = 1.12\text{mm}$  に基づく無次元パラメータの値は  $R = 23$ ,  $W = 62$  であり、傾斜角は  $\alpha = 0.08\text{rad}$  ( $= 4.6^\circ$ ) としている。図 2 (右) に示してあるのが、上流での攪乱を  $\epsilon = 0.03$ ,  $f = 1\text{Hz}$  としたときの、初期攪乱がすべて流れ去った段階での空間プロファイルである。上流での正弦波攪乱が空間的に成長し、孤立波の列を生じているのが分かる。

攪乱周波数を変えたときの系の応答の様子を図 3 に示す。まず (a) は図 2 (右) の点線部分に対応し、低い振動数 ( $f = 1\text{Hz}$ ) の攪乱によって生じる孤立波を示している。振動数を上げて  $f = 3\text{Hz}$  とすると、波形は (b) のような非正弦波的な様子を示すが、孤立波は形成されない。図 (c) は  $f = 5\text{Hz}$  の場合で、振幅も小さく (目盛に注意)、かなり正弦波に近い。この結果は、Liu *et al.* の測定結果 (文献 [17] の Fig.15 を参照) と

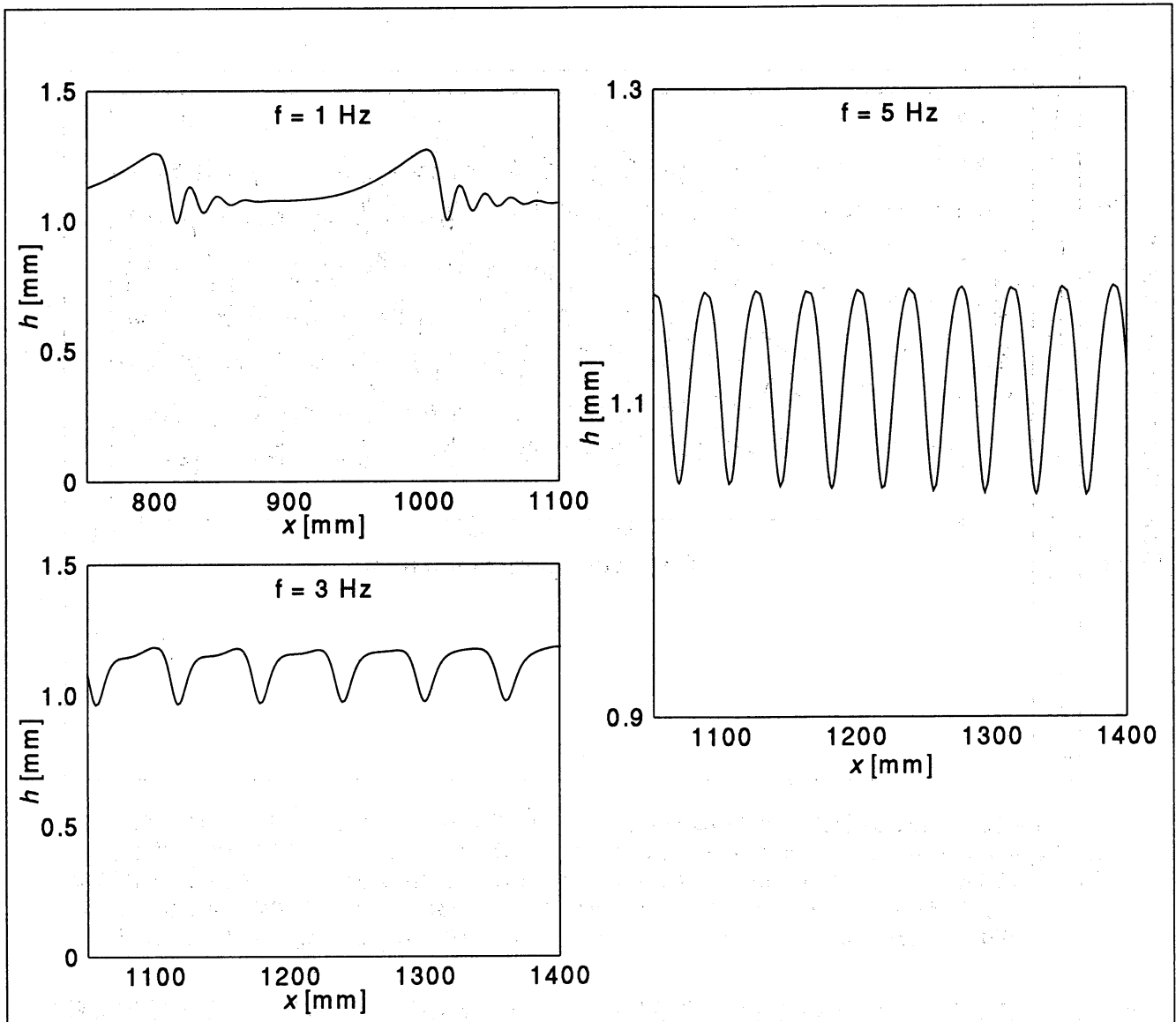


図 3: 上流で加える攪乱の振動数を変えたとき、下流に生じる波形がどのように異なるかを示す。縦軸は液膜厚さ  $h$ , 横軸は上流からの距離  $x$  で、ともに単位は mm としている。攪乱以外の条件は図 2 と同じ。

よく一致している。

### 3.3.4 孤立波の衝突

液膜流の孤立波の衝突の様子は、保存系のソリトンの場合とは全く異なる。Liu *et al.* は、孤立波の列に対して 後ろから大振幅の孤立波を衝突させる実験を行なった (文献 [18] の Fig.12 を参照)。

この実験に対応する非定常計算の結果を図 4 に示す。傾斜角  $\alpha = 0.14\text{rad}$  ( $= 8^\circ$ )、上流での液膜厚さ  $h_0 = 1.15\text{mm}$  とし、無次元パラメータは  $R = 26$ ,  $W = 35$  とした。最初に周期的攪乱 ( $\epsilon = 0.01$ ,  $f = 2.5\text{Hz}$ ) を加えて孤立波の列を作っておき、そのあと上流側で  $\epsilon = 0.3$  の局在的攪乱を加えて大きな孤立波を発生させた。大きな孤立波は速く進むので、小さな孤立波を呑みこみながら進む。さらに、大きな孤立波が通過したあとには、ほとんど平滑な液面が残される。

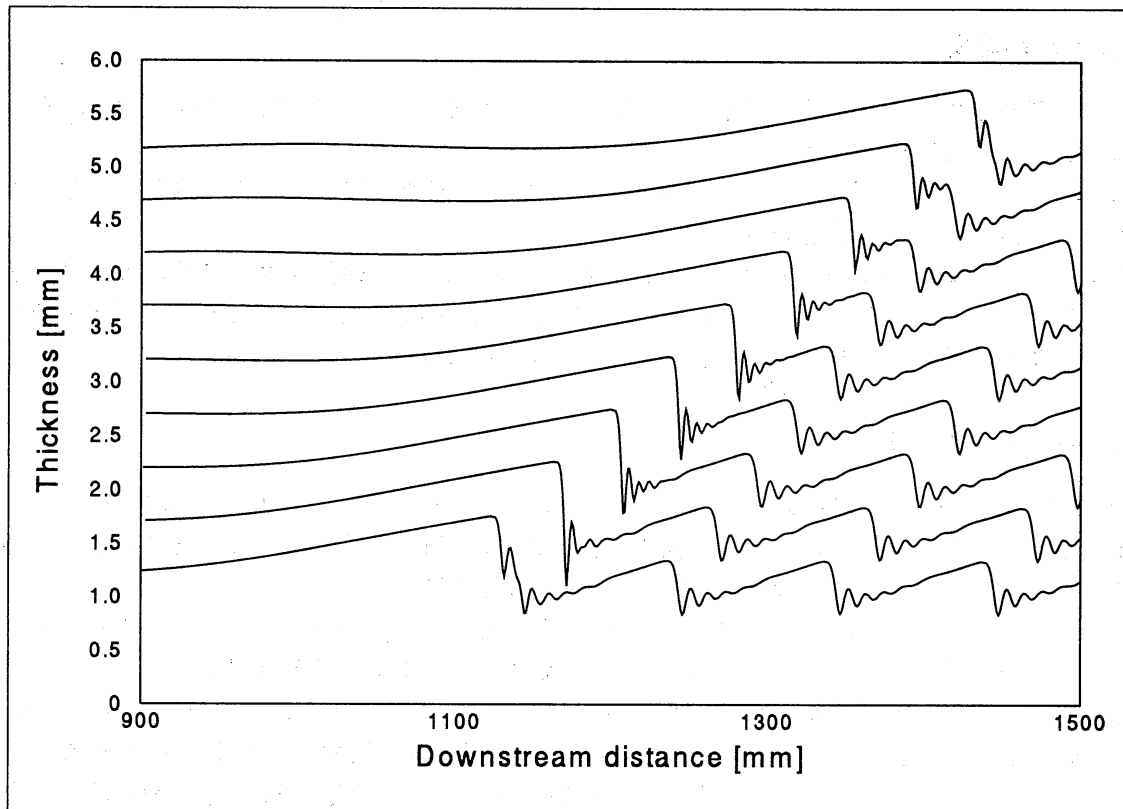


図 4: 定常な孤立波の列に、大きな振幅の孤立波をぶつけたときの様子。傾斜角  $\alpha = 0.14$ , 上流での液膜厚さは  $h_0 = 1.15\text{mm}$  で、無次元パラメータは  $R = 26$ ,  $W = 35$ 。時間間隔 0.1 秒ごとの波形を、厚さ 0.5mm 相当分だけずらして示している。

以上の結果は、Liu *et al.* の結果と定性的に一致する。ただし、レイノルズ数  $R$  がかなり大きいので、定量的な一致は難しいと思われる。

## 4 孤立波の裾構造

### 4.1 裾構造の重要性

長波方程式において、定常的に進行する孤立波が存在するためには、波の頂点が進む速度と裾が進む速度が一致することが重要である。また、複数の孤立波の相互作用は、裾構造に大きく依存する [20]。孤立波の形成と攪乱周波数の関係 (図 3 を参照) についても、1 個の孤立波の占めるべき長さに関係があると思われる、これは孤立波の裾の構造および長さに関する問題である。なお、孤立波の裾は、正弦波よりもむしろ  $h \sim 1 + \epsilon \exp[\kappa(x - ct)]$  のような指数関数波 (エヴァネッセントモード) として理解される [21] ことに注意する。

以下では、まず、方程式 (31) の孤立波解の裾の長さを考える。正則化演算子  $\hat{L}$  の考察から、下流の裾の長さはおよそ  $R$  の程度であることが分かる。上流の裾は振動する波形をもち、これは通常の表面張力波である。

現実の液膜により近いモデル方程式の定性的考察から、 $R$  が比較的大きい場合にも裾構造の長さはやはり  $R$  程度となる可能性が示唆される。また、正則化演算子について、慣性項に由来するエヴァネッセントモードを  $Q$  から消去するという意味があることが分かる。

## 4.2 孤立波の構成と裾構造

ここでは通常の凸型孤立波のみを考える。凹型の (つまりベースラインにたいして負の振幅をもつ) 孤立波は不安定であることが知られている [22]。

凸形の孤立波は、頂上がベースラインよりも高くなっているため、線形長波より大きな速度で進む。上流および下流の裾はこの速度に適合する必要がある。

上流の裾は指数関数形の単調な構造をもち、これは以下に示すように、正則化演算子の特性または流速場のエヴァネッセントモードに関係づけられる。下流側の裾は空間的に振動しており、これは表面張力波である。有限波数の表面張力波は長波より速いので、つじつまは合っている。

## 4.3 正則化演算子によって決まる長さスケール

演算子 (28) の本質的なふるまいにのみ興味があるので、 $h = h_0 = 1$  のように簡単化して論じる。

ただちに分かるのは、適当な境界条件のもとで方程式  $\hat{L}\phi = F(x)$  の解が一意だということである。このことから、 $S$  の定義 (16) は  $S$  と  $Q$  の一対一対応を与えていると考えて良い。

方程式  $\hat{L}\phi = 0$  の大域的な非自明解は存在しないが、局所的な指数関数解が存在するので、これを組み合わせてグリーン関数を構成することができる。レイノルズ数  $R$  が 1 程度またはそれ以上のとき、このグリーン関数は、上流側に  $R$  程度、下流側に  $1/R$  程度の長さの尾をひく。これより、たとえ  $S$  が局在しても、 $Q$  および  $h$  は上流側に  $R$  程度の長さの裾をもつことになる。(下流側は表面張力波があるので単純な見つもりはできない。) つまり、正則化方程式 (31) の孤立波解の裾の長さ  $\kappa^{-1}$  は、演算子  $\hat{L}$  のもつ特徴的な長さによって

$$\kappa^{-1} \sim R \quad (35)$$

と評価される。方程式 (31) の数値解は、 $R$  の増大とともに孤立波の上流側の裾の長さが増大することを示しており、上記の見つもり (35) と矛盾しない。

## 4.4 慣性が大きいときの裾構造

長波展開方程式 (1) は  $R \sim O(1)$  として展開した結果であるから (付録 B を参照)、 $R$  が大きいところで正しい結果を与える保証は全くない。方程式 (1) の孤立波の裾の長さは  $R/(c-2)$  程度と見つもられ、 $c$  が大きい場合には過小評価となっている可能性がある。

では、実際の液膜流ではどうなっているのだろうか。このことを見るために、 $R \sim \mu^{-1}$  の場合に Navier-Stokes 方程式の孤立波の裾構造がどうなるかを考察する。厳密な解析は困難であるから、Chang *et al.* [22] の方針に従い、

$$\mu \sim (WR)^{-1/3}, \quad \delta_{\text{Chang}} \sim \mu R \sim 1, \quad \epsilon_{\text{Chang}} \sim \mu^2 \ll 1$$

のようなパラメータを導入して、Navier-Stokes 方程式を  $\epsilon_{\text{Chang}}$  で展開する。結果は  $\epsilon_{\text{Chang}}$  の最低次で

$$R(\partial_t + u\partial_x + w\partial_z)u = -2\partial_x(h \cot \alpha - W\partial_x^2 h) + 2 + \partial_z^2 u \quad (36)$$

$$u|_{z=0} = 0, \quad \partial_z u|_{z=h} = 0, \quad (37)$$

となる (文献 [22] とは無次元化の方法が違うことに注意)。定常進行解を仮定して  $\partial_t = -c\partial_x$  とし、さらに一種の Oseen 近似

$$(u\partial_x + w\partial_z)u \simeq U\partial_x u, \quad U = \frac{1}{h} \int_0^h u dz \quad (38)$$

を導入する。流量保存の式 (13) から

$$-ch + Q = (-c + U)h = \text{const.} = -A \quad (39)$$

のように書けるので、これを用いて  $U$  を消去し 式 (36) を書き直すと

$$-\left[\partial_z^2 + \frac{AR}{h}\partial_x\right]u = 2 - 2\partial_x(h \cot \alpha - W\partial_x^2 h) \quad (40)$$

のようになる。いま興味があるのは裾の構造であるから、 $|h - 1| \ll 1$  と考え、方程式 (40) および 境界条件 (37) において  $h$  を 1 でおきかえる。一般解は

$$u = u_0 + \sum_k B_k \exp \frac{\pi^2 k^2}{4AR} x \sin \frac{\pi k}{2} z, \quad u_0 = 2z - z^2 \quad (41)$$

のように求められ、斉次解を含むことが分かる。斉次解の各成分はすべてエヴァネッセントモードであり、低次のモードの特徴的な長さは  $AR$  の程度である。特に、 $A \sim 1$  と見なして良い場合には、これは正則化方程式 (31) での裾の長さの評価 (35) と一致する。仮に  $A \sim R^\gamma$  だとしても、 $\gamma < -1$  ということは考えにくく、したがって定性的な結論は変わらない。なお流量保存 (39) によって  $h$  は  $u$  に関係づけられているので、線形の範囲で  $h - 1$  は  $u$  と同じ指数関数的なふるまいを示す。

Navier-Stokes 方程式 または近似方程式 (36) において、裾の長さの定量的な評価は数値的な手段によらざるを得ないであろうが、ここでの荒い評価とどの程度一致するかは、興味ある問題である。もし  $\gamma \sim 0$  だとすれば、正則化方程式 (31) は  $R \sim O(1)$  の範囲を超えて  $R \sim \mu^{-1}$  でも成り立つ可能性がある。

#### 4.5 正則化の意味

大振幅の孤立波は局所的に流量  $Q$  の増大を要求するから、孤立波の裾では方程式 (40) の斉次解の寄与を無視できず、したがって  $u_0$  に基づく通常の摂動計算は有効性を失う。この斉次解の由来をたどると、方程式 (36) が慣性項を含むことに帰着する。

さて解 (41) において、 $k = 1$  のモードは  $u_0$  に酷似している (規格化し内積をつくると 0.999 に達し、ほとんど一次従属であることが分かる)。Prokopiou *et al.* [23] は、放物線的な流速プロファイルの仮定が  $R \sim O(\mu^{-1})$  でも正当化できると主張しており、これは  $k \geq 2$  のモードに比べて  $k = 1$  のモードが卓越すること、つまり

$$u \simeq \left[1 + B_1 \exp \frac{\pi^2}{4AR} x\right] (2z - z^2)$$

と近似できることを示している。このとき

$$Q \simeq \int_0^1 u \, dz \simeq \frac{2}{3} \left[1 + B_1 \exp \frac{\pi^2}{4AR} x\right] \quad (42)$$

を得るが、

$$\tilde{S} = Q - \frac{4AR}{\pi^2} \partial_x Q \quad (43)$$

のようにすると  $B_1$  を消去できる。右辺は正則化演算子 (28) の最初の 2 項に対応する。もし方程式 (36) において  $O(\epsilon_{\text{chang}})$  の項まで含めて考えれば、式 (43) に  $\partial_x^2 Q$  の項が付け加えられることになり、係数を除いて正則化の式 (16) と同じものが得られる。

このことから、 $\hat{L}$  による正則化とは方程式 (40) の非斉次解の消去であることが分かる。つまり、 $Q$  は慣性項に由来する部分をエヴァネッセントモードの形で含んでおり、そのために  $u_0$  に基づく摂動計算はうまくいかないのだが、 $S$  ではこの部分が消去されるために摂動計算がうまくいくのだと考えられる。特異性の消去という意味で、これは確かに Padé 近似に似ている。

## 5 結論

臨界レイノルズ数  $R = R_c = (5/4) \cot \alpha$  を超えた液膜に低い振動数の攪乱を加えると、定常進行する孤立波の列が生じる。このときの表面波は、指数関数的に下流に向かって単調増大し頂上に至る部分と、これを先導する表面張力波とが交互に並んだ構造をしている。指数関数的な波形の部分は慣性の効果が大きい部分であって、ここでは速度もまた下流方向に指数関数的な増大を示し、頂上に近づくほど大きな流量を運ぶことができる。下流の表面張力波は、大きな速度によって孤立波をひっぱる役割を果たしている。

レイノルズ数が臨界値  $R_c$  よりかなり大きいとき、伝統的な長波展開の方法によるモデル方程式は現象をうまく記述できない。これは、非線形性によるスケール間相互作用が正しく考慮されていないためである。そこで長波展開に正則化という手法を導入し、より短いスケールを取り込んだモデル方程式 (31) を導いた。このモデル方程式は、 $R$  がかなり大きいところでも全く妥当な結果を与えることが数値的に確認された。このことは、液膜流の力学の本質的な部分が低次元のモデル方程式に縮約されていることを示している。当然ながら  $|R - R_c|$  が小さく長波のみが卓越する場合には、方程式 (31) は伝統的な長波方程式 (1) に帰着する。なおここでは言及しなかったが、正則化方程式と積分近似型方程式 [23] を関連づけることも可能である [19]。

モデル方程式 (31) によると、孤立波の裾の長さは  $R$  の程度である。Chang *et al.* と同様のモデル方程式 (36) の考察から、レイノルズ数が比較的大きい場合 ( $R \sim \mu^{-1}$ ) にもやはり裾の長さが  $R$  とともに増大することが示唆される。方程式 (31) の有効性は、このように裾構造を正しくとらえていることに関係があると思われる。

最近では、電子計算機により、Navier-Stokes 方程式に基づいて液膜流の直接数値計算を行なうことが可能となった [24]。しかしこれによってモデル方程式の価値が減じるわけではない。むしろ、現象の本質を抜き出すという、理論屋の本来の使命はますます重要になるであろう。それなら、モデル方程式 (31) に縮約された液膜流の本質とは何であろうか。ひとつの解答として裾構造に着目した結果がこの研究報告であるが、どこまで現象の本質を言い当てているのかに興味を持たれる。

## 付録

### A 無次元化

液膜の特徴的な厚さを  $h_0$  とする。このとき、 $h, x, z$  を  $h_0$  で、 $u, w$  を  $U$  で、 $t$  を  $h_0/U$  で無次元化する。ただし  $U_0$  は式 (10) により定める。また  $p - p_{\text{atm}}$  をあらためて  $p$  と置き、 $p$  および  $\tau$  を  $\rho g_x h_0$  で無次元化する。

基礎方程式系を無次元変数で書き換え、整理した結果は次のとおり：

$$\partial_z^2 u = R D_t u + 2 \partial_x p - 2 - \partial_x^2 u \quad (44)$$

$$\partial_z p = -(R/2) D_t w - \cot \alpha + (1/2) [\partial_x^2 + \partial_z^2] w \quad (45)$$

$$\partial_z w = -\partial_x u \quad (46)$$

$$u|_{z=0} = w|_{z=0} = 0 \quad (47)$$

$$\partial_z u|_{z=h} = -\partial_x w|_{z=h} + 4 \partial_x u|_{z=h} \partial_x h + [\partial_z u + \partial_x w]|_{z=h} (\partial_x h)^2 \quad (48)$$

$$p|_{z=h} = -[1 + (\partial_x h)^2] \partial_x u|_{z=h} + p|_{z=h} (\partial_x h)^2 - W \Sigma \quad (49)$$

$$\partial_t h = -\partial_x Q \quad (50)$$

ここで表面張力項 $\Sigma$  および流量 $Q$  は

$$\Sigma = \frac{[1 - (\partial_x h)^2] \partial_x^2 h}{[1 + (\partial_x h)^2]^{3/2}}, \quad Q = \int_0^h u dz$$

で与えられる。無次元パラメータとして、レイノルズ数 $R$ およびウェーバー数 $W$ が

$$R = \frac{U h_0}{\nu} = \frac{(g \sin \alpha) h_0^3}{2\nu^2}, \quad W = \frac{T}{(\rho g \sin \alpha) h_0^2}$$

のように定義される。これらは $h_0$ に依存するので、 $h_0$ の選択に任意性がある場合は、それに応じて $R$ や $W$ にも任意性が生じる。(なお $R$ と $W$ から $h_0$ を消去したものをカピッツァ数と称する。)

## B 長波展開

### B.1 長波パラメータの導入

長波パラメータ $\mu$ を導入し、次のように展開する:

$$\begin{aligned} \partial_x &= \mu \partial_{x_1}, \quad \partial_t = \mu \partial_{t_1} + \mu^2 \partial_{t_2} + \cdots, \\ u &= u_0 + \mu u_1 + \mu^2 u_2 + \cdots, \quad w = \mu w_1 + \mu^2 w_2 + \cdots, \quad p = p_0 + \mu p_1 + \mu^2 p_2 + \cdots \end{aligned}$$

ただし $\partial_z$ は展開せず、また $h$ も $O(1)$ の量として扱う。レイノルズ数は $R \sim |R - R_c| \sim O(1)$ と見なすので、線形波による中立波数を基準とした $\mu$ の評価

$$\mu \sim k_c \sim \sqrt{\frac{R - R_c}{W + O(1)}}$$

とつじつまが合うように

$$W = \mu^{-2} \tilde{W}, \quad \tilde{W} \sim O(1) \quad (51)$$

と置くことにする [6]。

### B.2 計算結果

第0近似として、 $O(\mu)$ の項を無視することにより

$$u_0 = 2zh - z^2 \quad (52)$$

$$Q_0 = \int_0^h u_0 dz = \frac{2}{3} h^3 \quad (53)$$

$$p_0 = (h - z) \cot \alpha - \tilde{W} \partial_{x_1}^2 h \quad (54)$$

が得られる。方程式系(44)~(50)は逐次近似の形をしているので、*Mathematica*のような数式処理によって機械的に高次近似を求めるのは容易である。必要な結果のみを示す:

$$Q_1 = \int_0^h u_1 dz = \frac{8}{15} R h^6 \partial_{x_1} h - \frac{2}{3} (\cot \alpha) h^3 \partial_{x_1} h + \frac{2}{3} \tilde{W} h^3 \partial_{x_1}^3 h \quad (55)$$

$$\begin{aligned} Q_2 = R^2 & \left[ \frac{1016}{315} h^9 (\partial_{x_1} h)^2 + \frac{32}{63} h^{10} \partial_{x_1}^2 h \right] - (R \cot \alpha) \left[ \frac{32}{15} h^6 (\partial_{x_1} h)^2 + \frac{40}{63} h^7 \partial_{x_1}^2 h \right] + \frac{14}{3} h^3 (\partial_{x_1} h)^2 \\ & + 2h^4 \partial_{x_1}^2 h + \tilde{W} R \left[ \frac{40}{63} h^7 \partial_{x_1}^4 h + \frac{16}{3} h^6 (\partial_{x_1} h) \partial_{x_1}^3 h + \frac{16}{5} h^6 (\partial_{x_1}^2 h)^2 + \frac{32}{5} h^5 (\partial_{x_1} h)^2 \partial_{x_1}^2 h \right] \end{aligned} \quad (56)$$

以上より、流量  $Q$  と液膜厚さ  $h$  の関係式が

$$Q = Q_0[h] + \mu Q_1[h, \partial_{x_1} h] + \mu^2 Q_2[h, \partial_{x_1} h, \partial_{x_1}^2 h] + O(\mu^3) \quad (57)$$

の形で得られたことになる。各項の具体的な形は (53)(55)(56) で与えられる。なお  $\mu \partial_{x_1} = \partial_x$ ,  $\mu^{-2} \tilde{W} = W$  であるから、関係式 (57) は (最後の  $O(\mu^3)$  を無視すれば) 見かけ上  $\mu$  を含まない形に書き直せることに注意。

## C Padé 近似

一般に 関数  $\psi(k)$  のべき級数表示が

$$\psi = c_0 + c_1 k + c_2 k^2 + \cdots \quad (58)$$

のように与えられており、これは  $k = 0$  の近くでのみ収束するとしよう。収束半径に限界があるということは特異点の存在を暗示する。そこで  $n$  次多項式

$$g = 1 + b_1 k + b_2 k^2 + \cdots + b_n k^n \quad (59)$$

を導入し、積  $f = g\psi$  をべき級数で表すことを考える。うまく  $g$  を定めれば、 $g$  のゼロ点によって  $\psi$  の特異点を近似的に解消できるので、収束性を改善できることが期待される。

未定の係数  $\{b_j\}$  を定める条件として、 $f$  の級数表示

$$f = g\psi = c_0 + (c_1 + b_1 c_0)k + (c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0)k^2 + \cdots = \sum a_n k^n \quad (60)$$

において  $a_{m+1}$  から  $a_{m+n}$  までの  $n$  個の係数がすべてゼロになることを要求する。これにより  $f$  はほとんど  $m$  次多項式と見なすことができ、

$$\psi = \frac{f}{g} \simeq \frac{a_0 + a_1 k + \cdots + a_m k^m}{1 + b_1 k + \cdots + b_n k^n} \quad (61)$$

のような近似を得る。近似式 (61) は  $\psi$  に対する Padé 近似 (くわしくは  $(m, n)$ -Padé 近似) と呼ばれ、 $k$  が小さいところでは  $m+n$  次のべき級数近似と同等であるが、 $k$  が有限のところでも、多くの場合 べき級数より良い近似を与えることが知られている。

## 参考文献

- [1] P. L. Kapitza: *Wave flow of thin fluid layers of liquid*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **18**, 3 (1948)
- [2] T. B. Benjamin: *Wave formation in laminar flow down an inclined plane*, J. Fluid Mech. **2**, 554 (1957)
- [3] C.-S. Yih: *Stability of liquid flow down an inclined plane*, Phys. Fluids **6**, 321 (1963)
- [4] D. J. Benney: *Long waves on liquid films*, J. Math. Phys. **45**, 150 (1966)
- [5] D. J. Benney: *Long waves on liquid films*, J. Math. Phys. **45**, 0 (1957)
- [6] B. Gjevik: *Occurrence of finite-amplitude surface waves on falling liquid films*, Phys. Fluids **13**, 1918 (1970)



- [7] B. Gjevik: *Spatially varying finite-amplitude wave trains on falling liquid films*, Acta Polytech. Scand. Mech. Eng. **61**, 1 (1971)
- [8] Nakaya C.: *Long waves on thin fluid layer flowing down an inclined plane*, Phys. Fluids **18**, 1407 (1975)
- [9] A. Pumir, P. Manneville & Y. Pomeau: *On solitary waves running down an inclined plane*, J. Fluid Mech. **135**, 27 (1983)
- [10] A. Pumir, P. Manneville & Y. Pomeau: *On solitary waves running down an inclined plane*, J. Fluid Mech. **135**, 27 (1983)
- [11] T. R. Salamon, R. C. Armstrong & R. A. Brown: *Travelling waves on vertical films: Numerical analysis using the finite element method*, Phys. Fluids **6**, 0 (1994)
- [12] R. M. Roberts, Y. Ye, E. A. Demekhin & H.-C. Chang: *Wave Dynamics in Two-Layer Couette Flow*, preprint
- [13] OOSHIDA T. & Takuji KAWAHARA: *Generic Weakly-Nonlinear Model Equation for Density Waves in Two-Phase Fluids*, Phys. Rev. E **56**, 511 (1997)
- [14] G. B. Whitham: *Linear and nonlinear waves*, Wiley (1974)
- [15] T. B. Benjamin, J. L. Bona & J. J. Mahony: *Model equation for long waves in nonlinear dispersive systems*, Phil. Trans. R. Soc. London **0**, 0 (1972)
- [16] D. J. Korteweg & G. de Vries: *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves*, Phil. Mag. (v) **39**, 0 (1895)
- [17] Jun Liu, Jonathan D. Paul & J. P. Gollub: *Measurements of the primary instabilities of film flows*, J. Fluid Mech. **250**, 69 (1993)
- [18] Jun Liu & J. P. Gollub: *Solitary wave dynamics of film flows*, Phys. Fluids **6**, 1702 (1994)
- [19] 大信田 丈志: 液膜流の有限振幅波を長波展開で記述できないか?, RIMS report **993**, 150 (1997)
- [20] T. Kawahara & S. Toh: *Pulse interactions in an unstable dissipative-dispersive nonlinear system*, Phys. Fluids **31**, 0 (1988)
- [21] 広田良吾: 直接法によるソリトンの数理, Iwanami Shoten (1992)
- [22] H.-C. Chang, E. A. Demekhin & D. I. Kopelevich: *Nonlinear evolution of waves on a vertically falling film*, J. Fluid Mech. **250**, 433 (1993)
- [23] Th. Prokopiou, M. Cheng & H.-C. Chang: *Long waves on inclined films at high Reynolds number*, J. Fluid Mech. **222**, 665 (1991)
- [24] 宮良 明男: 傾斜面上を表面波を伴って流れる流下液膜の数値計算 (第1報, 気液界面条件の取扱い方法に関する考察), Japan. Soc. Mech. Eng. J. Series B (Japanese version) **63**, 3239 (1997)